ЖОҒАРЫ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР
1. Кейбір реті төмендетілетін дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 1.

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

n-ші ретті дифференциалдық теңдеу немесе

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

бас туындыға қатысты шешілген дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Негізгі ұғымдары:

1) $y = \varphi(x)$ шешімі

$$f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

n - ші рет дифференциалданатын функция.

2) Коши есебі:

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi'(x_0), \ldots, y_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін анықтайды.

3) $y = \varphi(x, c_1 c_2 \ldots c_n)$ - n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, мұндағы $c_1, c_2, ..., c_n$ тұрақтыларына мәндер беріп шексіз көп дербес шешімдер алуға болады.

n - ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі туралы теоремаға тоқталалық.

Теорема 1: Егер (2) n –ретті дифференциалдық теңдеудің оң жағы $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ функциясы $M_0(x_0; y_0)$ қамтыған D облысында үздіксіз және сол функцияның аргументі бойынша

$$\frac{\partial^{(\kappa)} f}{\partial y^{(\kappa)}}, \kappa = 0,1,2,..., n-1$$

дербес туындылары бар болса, онда $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінің шағын аймағында (1) теңдеуін қанағаттандыратын бір ғана үздіксіз функция табылады.

n-ші ретті дифференциалдық теңдеудің шешімдерін тек кейбір жағдайларда ғана анықтауға болады. Бұл теңдеуді келесі жағдайларда қарастыруға болады:

1) $y^{(n)} = f(x),$ (3)

$y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)} -$ қатыспаған жағдай.

$y = \varphi(x, c_1 c_2 \ldots c_n)$ жалпы шешімі n рет интегралдау арқылы (4) түрінде алынады.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = f_1(x) + c_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + c_1)dx = f_2(x) + c_1 x + c_2$$

$$y^{(n-3)} = \int (f_2(x) + c_1 x + c_2)dx = f_3(x) + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

……………………………………………………...

$$y = f_n(x) + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_{n-1}x + c_n \qquad (4)$$

Мысалы 1: $y^{IV} = \cos^2 x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: теңдеудің екі бөлігін dx-ке көбейтіп интегралдайық:

$$y''' = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1,$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1\right)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1 x + c_2\right)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{12} - \frac{\sin 2x}{16} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)dx = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Жауабы: $y = \frac{x^4}{48} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{c_1 x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$ ізделінді жалпы шешімі.

2) $F(x, y^{(\kappa)}, y^{(\kappa+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, (5)

у-қатыспаған жағдай.

$y^{(\kappa)} = z$ - ауыстыруы арқылы теңдеудің ретін төмендетуге болады.

$y^{(\kappa+1)} = z'$

$y^{(\kappa+2)} = z''$

……….…….

$y^n = z^{(n-1)}$

Мысалы 2: $y'' = y' + x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y' = z, \;\; y'' = z'$ ауыстыруын енгізсек:

$z' - z = x$ теңдеуі бірінші ретті сызықтық теңдеу. $z = uv, \;\; z' = u'v + uv'$

Бернулли алмастыруын енгізейік:

$u'v + uv' - uv = x$

$u'v + u(v' - v) = x$

$$v' - v = 0 \quad (a) \qquad\qquad u'v = x \quad (б)$$

$$v' = v \qquad\qquad \frac{du}{dx}e^x = x$$

$$\frac{dv}{dx} = v \qquad\qquad du = \frac{x}{e^x}dx$$

$$\frac{dv}{v} = dx \qquad\qquad \int du = \int xe^{-x}dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx \qquad\qquad u = \left| \begin{array}{l} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv = e^{-x}dx \\ v = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1$$

$$\ln v = x \qquad\qquad \underline{u = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1}$$

$$\underline{v = e^x}$$

Демек z=uv және $z = y'$ екенін ескерсек:

$$y' = (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1)e^x = ((-x-1)e^{-x} + c_1)e^x = -x - 1 + c_1e^x$$

y-ті табу үшін екі бөлігін де интегралдау қажет:

$$y = \int (-x - 1 + c_1e^x)dx = -\frac{x^2}{2} - x + c_1e^x + c_2$$

Жауабы: $y = -\dfrac{x^2}{2} - x + c_1e^x + c_2$.

3) $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, (6)

x - қатыспаған жағдай

$y' = z$ ауыстыруын енгіземіз, келесі туындылардың табылу реті:

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz : dy}{dx : dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dz}{dy} = z\frac{dz}{dy}$$

$$y''' = z\left(z\frac{d^2z}{d^2y} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right),$$ т.с.с. жалғасады.

Мысалы 3: $(y')^2 + 2yy'' = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешімі: $y' = z,\; y'' = zz'$ ауыстыруын берілген теңдікке қойсақ:

$$z^2 + 2yzz' = 0$$

$$2yzz' = -z^2$$

$$2yz\frac{dz}{dy} = -z^2$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y}$$

$$\int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dy}{2y}$$

$$\ln z = -\frac{1}{2}\ln y + \ln c_1$$

$$z = c_1 y^{-\frac{1}{2}} \quad , z = y'$$

$$y' = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int y^{\frac{1}{2}} dy = c_1 \int dx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1(x + c_2)$$

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} c_1(x + c_2)$$

$$y = \left(\frac{3}{2}c_1\right)^{\frac{2}{3}}(x + c_2)^{\frac{2}{3}}$$

$y = c_1(x + c_2)^{\frac{2}{3}}$ - ізделінді жалпы шешім.